Examen de fin de séance - Mathématiques R114

Nom et groupe de TD: ______________________________

Exercice 1: Etudes de fonction particulière définie sur deux intervalles

On rappelle la définition de la valeur absolue : $|x| = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \in \quad [0, +\infty[\\ -x & \text{pour} \quad x \in \quad]-\infty, 0[\end{cases}$

1. Soit $F(x) = |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$ tracée ci-dessus (ou au tableau). Montrer par la définition de la dérivée.
   (a) que la dérivée de F pour $x > 0$, est $F'(x) = 1$.
   (b) que la dérivée de F pour $x < 0$, est $F'(x) = -1$.
   (c) Représenter la fonction F.

Exercice 2: Etude de fonctions classiques

1. Soit $F(x) = -x^2$ définie sur $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer directement à partir de la définition de la dérivée que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = -2x$.
   (b) Déterminer x pour que $F'(x) = 0$, puis le signe de $F'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Déterminer les intervalles (maximaux) où F est croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante.
   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
   (e) Représenter la fonction F (avec utilisation des tangentes).
2. Soit $G(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
   (a) Soit deux nombres $x, x_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tel que $x \neq x_0$, montrer que $\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{-xx_0}$.
   (b) Exploiter le résultat précédent pour montrer que $x \neq 0$, $G'(x) = \frac{1}{-x^2}$.
   (c) Pourquoi G n'est pas dérivable en 0 ?
   (d) On rappelle que la fonction G n'est pas définie en 0. Exploiter ce qui a été fait pour $F(x)$. Dresser le tableau de signe de $G'(x)$.
   (e) Dresser le tableau de variation de $G(x)$.
   (f) La fonction est-elle bijective sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$? L'idée derrière la recherche d'une fonction inverse de $f(x)$est de trouver $g(x)$ tel que $g(f(x)) = f(g(x)) = x$.

Exercice 3: Manipuler la dérivée d'une fonction inconnue

1. On suppose que $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction (partiellement) dérivable de $\mathbb{R}$ et que:

$$F'(x) = \frac{-(1-x)(x-2)(x-3)(x+5)}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

   (a) Simplifier $F'(x)$.
   (b) La fonction est-elle définie pour $x = 4$, justifier ? Montrer que $F'(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{4\}$?
   (c) Déterminer x pour que $F'(x) = 0$, puis déterminer le signe de $F'(x)$ en fonction de x.
   (d) Déterminer les intervalles (maximaux) où F est croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante.
   (e) Dresser le tableau de variation de la fonction F sur $\mathbb{R}$.